OLASILIK VE İSTATİSTİK

Olasılık ve şans günlük hayatımızda her an yüz yüze geldiğimiz kavramlardır. Kesin emin olmadığımız konularda “belki, herhalde, olabilir” gibi şüpheyi belirten ifadeler kullanılır. Bunların hepsi olasılıkla ilgilidir.

İstatistikte de olasılık kavramı oldukça önemlidir. Çok basit durumlar dışında, popülasyondan alınan örneğe bakarak popülasyon hakkında kesin karar vermek mümkün değildir. Olasılık kavramının da herkes tarafından aynen kabul edilen kesin bir tanımı da yoktur.

Olasılık kuramına giriş için gerekli olan küme kuramının bazı temel kavramları aşağıda verilmiştir.

Kümeler

Birlikte ele alınan belirli nesneler topluluğuna küme, kümede içerilen nesnelere de öğe, eleman veya üye denir.

Aksi belirtilmedikçe tüm kümeler, evrensel kümenin alt kümesidir.

Tamsayılar kümesi Z (…,-1,0,1,2,…), Pozitif tamsayılar kümesi N (1,2,3,…), Reel sayılar kümesi R ile gösterilmektedir.

Solu kümeler, sonsuz kümeler vardır.

……………………..

Kuvvet kümesi: Herhangi bir A kümesinin bütün alt kümelerinden oluşan kümeye, “*kuvvet kümesi”* denir ve $\sigma(A)$ yada $P(A)$ ile gösterilir.

n elemanlı bir kümenin kuvvet kümesindeki eleman sayısı 2^n dir.

Küme İşlemleri

Kesişim(arakesit) , Birleşim, Tümleme(tümleyen), Fark(ayırım).

……………

Ayrık Kümeler: Ortak elemanı olmayan A ve B kümelerine ayrıktırlar denir ve $A \cap B = \emptyset$ dir.

Çarpım Kümeleri

A ve B iki küme olsun. AXB biçiminde belirtilen A ve B 'nin çarpım kümesi, $a \in A\ \ ve\ \ b \in B$ olduğu tüm (a, b) sıralı çiftleri içerir. Yani,

$$AXB = \{(a, b) :\ \ a \in A\ , b \in B\}$$

Tanım. Ω boş olmayan bir küme olmak üzere, bu kümenin bazı alt kümelerinden oluşan kümeye(topluluğa) sınıf denir ve $\digamma$ ile gösterilir.

Herhangi bir Ω kümesinin bütün alt kümelerinin oluşturduğu sınıfa "*kuvvet kümesi"* denir ve $\sigma(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım. Ω boş olmayan bir küme, $\digamma$ de Ω 'da bir sınıf olsun. Eğer bu sınıf aşağıdaki özellikleri sağlarsa, Ω üzerinde bir cebirdir denir.

i) $\Omega \in \digamma$

ii) $\forall A \in \digamma\ \ için\ \ \bar{A} \in \digamma$

iii) $\forall A, B \in \digamma\ \ için\ \ A \cup B \in \digamma$

$\digamma$ sınıfı için son özellik; $n = 1, 2, \ldots\ \ için\ A_n \in \digamma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \digamma$

biçimindeyse $\digamma$ 'ye Ω üzerinde σ-cebir (sigma cebir) denir.

$\sigma -$ cebirin her bir elemanına **olay,** . $(\Omega\ ,\ \digamma)$ çiftine de **ölçülebilir uzay** denir.

Örnek. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $\digamma = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ olmak üzere $\digamma$ sınıfı σ-cebirdir.

SORU: Kuvvet kümesi sigma cebir midir? (evet)

Örnek noktalarını sayma kuralları

Toplama kuralı: Ayrık iki olaydan biri n farklı yolla diğeri m farklı yolla gerçekleşirse, biri veya diğeri $n + m$ farklı yolla gerçekleşir. Buna toplama kuralı denir.

Örnek. Bir kafede 4 çeşit çay ile 3 çeşit kahve sunulmaktadır. Kafeye gelen bir müşteri çay veya kahve içecektir. Kaç farklı şekilde sipariş verebilir?

4+3 = 7 farklı sipariş verebilir.

NOT: “ veya ” bağlacı ile bağlanan olaylar ayrıktır ve toplama kuralı geçerlidir.

Çarpma kuralı: Bir olay n farklı yolla diğer olay m farklı yolla gerçekleşebilsin. Bu iki olay aynı anda $n.m$ farklı yolla gerçekleşebilir.

Örnek. Bir kişinin 3 gömlek, 5 kravat ve 2 takım elbisesi vardır. Bu kişi kaç farklı biçimde giyinebilir?

3.5.2 = 30 farklı biçimde giyinebilir.

NOT: “ ve ” bağlacı ile bağlanan olaylar ayrık değildir ve çarpma kuralı geçerlidir.

Örnek. Bir oto plakası iki belirgin farklı harf ve birincisi sıfır olmayan üç rakamdan oluşsun. Bu durumda kaç farklı oto plakası basılabilir?

23x22x9x10x10=455400

farklı oto plakası basılabilir.

Permüstasyon:

Tanım. 1’den n ’e kadar pozitif tamsayıların çarpımına n-faktöriyel denir ve $n!$ olarak yazılır.

$$n! = 1.2.3. \dots (n-2).(n-1).n$$

$$0! = 1 \quad ve \quad 1! = 1 \quad dir.$$

Tanım. n farklı elemanın r tanesi $(r \leq n)$ sıralanırsa elde edilecek değişik düzenlerin sayısı permütasyon olarak adlandırılır.

“Nesnelerin kümesinin bir kısmının ya da tümümün belli bir sıralamasına veya düzenlenmesine permütasyon denir.”

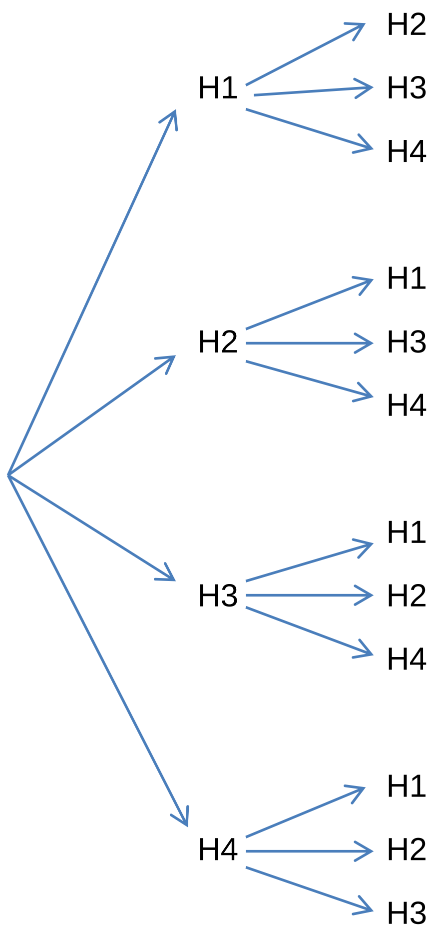
$$\boldsymbol{P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}} \quad , \quad \boldsymbol{r < n}$$

Tümü birlikte kullanılan n farklı nesnenin permütasyonlarının sayısı $n!$ dir.

Tanım. Bir çember üzerinde düzenlenecek n farklı nesnenin permütasyonlarının sayısı $(n-1)!$ dir.

Örnek. Bir TV sunucusu haber bülteninde okuması gereken 4 farklı haberden ikisini kaç farklı şekilde sıralayabilir?

$$\boldsymbol{P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = 12}$$



Örnek. 6 kız ve 3 erkek olan bir arkadaş topluluğu sinemaya gidiyor. Her sırada 9 adet koltuk bulunan sinema salonunun dördüncü sırasında,

a) 3 erkek yan yana olmak şartıyla kaç farklı biçimde oturulabilir?
b) Sıranın sonunda kızlardan biri olacak ve erkekler yan yana gelemeyecek şekilde kaç farklı oturma düzeni yapılabilir?

Çözüm.

a) Üç erkek yan yana geleceği için tek kişi gibi düşünülür ve 7 kişi kendi aralarında $7!$ **farklı biçimde oturabilir. Erkeklerin de kedi aralarında yer değiştirmesi söz konusu olup** $3!$ **kadardır. O halde**

$$\mathbf{7!\,3! = 7.6.5.4.3.2.1.3.2.1 = 30240}$$

farklı biçimde oturabilirler.

b) * K * K * K * K * K * K şeklinde önce kızlar oturur ve $6!$ faklı biçimde oturabilirler.

Erkekler, * ile gösterilen yerlerden üçüne oturabilir (yan yana oturamayacakları için). Bu işlem $P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = 6.5.4 = 120$ farklı şekilde olur.

Bu durumda, istenen sonuç; $120x6!$ olacaktır.

SORU. Ahmet(A) ve Orhan(O) masa tenisi oynuyorlar. Üst üste 2 seti veya toplamda 3 seti aynı oyuncu kazandığında maçı da kazanmış oluyor.

Maçın kazanılma durumlarını ağaç çizelgesiyle gösterip, mümkün sonuçların kümesini yazınız. (10)

Tekrarlı (Yinelemeli) Permütasyonlar

Nesnelerinden bazıları aynı olan permütasyonları bulmak için kullanılan genel formül aşağıdaki gibidir.

$r_1 \; benzer, \; r_2 \; benzer, \ldots, r_k \; benzer$ nesneleri olan n nesnenin permütasyon sayısı $(r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n)$,

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \frac{n!}{r_1! \, r_2! \ldots r_k!}$$

kadardır.

Örnek. 4 kırmızı, 3 beyaz ve 1 mavi bayraktan oluşan bir kümeden her biri 8 bayrak içeren kaç farklı düzen elde edilir?

Çözüm.

$$\frac{n!}{r_1! \, r_2! \ldots r_k!} = \frac{8!}{4! \, 3! \, 1!} = 280$$

Örnek. 2 kırmızı, 3 siyah ve 5 beyaz boncuk bir ipe dizilecektir. Aynı renkte olan boncuklar eşit büyüklükte ve benzer biçimdedirler. Bu boncuklar ipe kaç farklı şekilde dizilebilir?

Çözüm.

$$\binom{10}{2\,, 3\,, 5} = \frac{n!}{r_1! \, r_2! \ldots r_k!} = \frac{10!}{2! \, 3! \, 5!} = 2520$$

Kombinasyon:

Tanım. Bir defada r tanesi alınan n farklı nesnenin bir kombinasyonu, düzenleme sırasına bakılmaksızın n nesneden r tanesinin seçimidir ve

$$\boldsymbol{C(n,r)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

İle hesaplanır.

Tanım. Bir defada $\mathrm{n}-\mathrm{r}$ tanesi alınan n farklı nesnenin kombinasyonlarının sayısı, bir defada r tanesi alınan n farklı nesnenin kombinasyonlarının sayısına eşittir. Yani,

$$\boldsymbol{C(n,n-r)=\binom{n}{n-r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\binom{n}{r}=C(n,r)}$$

Örnek. 3 kitap arasından 2'sinin seçilmesi kaç farklı biçimde olur?

$$\boldsymbol{C(3,2)=\frac{3!}{2!\,(3-2)!}=3}$$

NOT: $\mathrm{P(n,r)=r!\ C(n,r)}$

Örnek. a, b, c, d harflerinden 3 harf alınarak yapılan kombinasyon ve permütasyon sayıları aşağıda verilmiştir.

$n=4\ \ ,\ \ r=3$

$$C(4,3)=\frac{4!}{3!\,(4-3)!}=4$$

Kombinasyonlar	Permütasyonlar
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
abd	abd, adb, bad, bda, dab, dba
acd	acd, adc, cad, cda, dac, dca
bcd	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb

$$P(4,3)=\frac{4!}{(4-3)!}=4.3.2.1=24$$

$$\mathbf{P(n,r)=r!\ C(n,r)\Rightarrow P(4,3)=3!\ C(4,3)\Rightarrow 24=3!\,4\Rightarrow 24=24}$$

Örnek. 4 evli çift arasından 3 kişilik bir kurul kaç farklı yolla seçilir?

a) Tümü eşit seçilme şansına sahiptir.
b) Kurulda 2 kadın ve bir erkek olmak zorundadır.
c) Bir evli çift aynı kurulda bulunamayacaktır.

Çözüm.

a) $C(8,3) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8.7.6.5!}{3.2.1.5!} = 56$
b) $\binom{4}{2}\binom{4}{1} = \frac{4!}{2!2!}\frac{4!}{1!3!} = 6x4 = 24$
c) Bir evli çift aynı kurulda bulunamayacaksa, 3 çiftten şahıslar bulunmalıdır. Önce 4 çift arasından 3 çift seçilir.

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4$$

Daha sonra her çiftten birer kişi seçilerek,

$$4\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 32$$

bulunur.

II. yol. $\binom{8}{3} - \binom{4}{1}\binom{6}{1} = 32$

Tüm seçimden, herhangi bir çiftin bulunduğu kurulların sayısını çıkardık.

$\binom{8}{3}$: $8\ kişiden\ 3\ kişinin\ seçimi$

$\binom{4}{1}$: $4\ çiftten\ birinin\ seçimi$

$\binom{6}{1}$: $Geriye\ kalan\ 6\ kişiden\ birinin\ seçimi$

Tanım (İki farklı cinsteki öğelerin permütasyonu). n nesnenin r tanesi birinci çeşit, geriye kalan $n-r$ tanesi ikinci çeşit ise bu n nesnenin permütasyonlarının sayısı

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{r}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}}$$

dir.

Örnek. Bir sınıfta 12 kız ve 10 erkek öğrenci vardır. Kızlar ve erkekler kendi aralarında artan boy uzunluklarına göre sıralanacak biçimde sınıf kaç farklı şekilde düzenlenebilir?

Çözüm.

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{r}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}} \Rightarrow \frac{\mathbf{22}!}{\mathbf{12}!\,(\mathbf{22}-\mathbf{12})!} = \binom{\mathbf{22}}{\mathbf{12}} = \binom{\mathbf{22}}{\mathbf{10}} = \mathbf{646646}$$

Teorem (Pascal Kuralı):

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \quad , \quad 1 \leq\leq r \leq n$$

dir.

Örnek. 6 aday, temsilci olmak için seçime katılmıştır. Bir seçmen oyunu, 1 yada 2 adayın adını işaretleyerek kullanabilmektedir. Seçmen oyunu kaç farklı şekilde kullanabilir?

Çözüm. İki ayrık durum vardır. 6 adaydan birini yada 6 adaydan ikisini işaretleyebilir.

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 21$$

veya Pascal kuralından, $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} = \binom{7}{2} = 21$ olur.

Binom Teoremi: n pozitif tamsayı olmak üzere, a ve b'in her değeri için

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

ifadesine Binom açılımı denir. Burada,

$\binom{n}{r}$ katsayılarına, Binom katsayıları denir.

$\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ ifadesine, açılımın genel terimi denir.

$\mathrm{r} = 0$ alınırsa baştan 1. terim

$\mathrm{r} = 1$ alınırsa baştan 2. terim

$\vdots$

$\mathrm{r} = \mathrm{k}$ alınırsa baştan $(\mathrm{k}+1)$. terim elde edilir.

Örnek. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Binom teoreminden, ($a = 1$ ve $b = 1$)

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

olur.

Örnek. $(2x-3)^5$ in açılımında x^3 ün katsayısı nedir?

Çözüm.

Binom teoreminden, ($a = 2x$ ve $b = -3$ $alırsak$, $tersi\ de\ olabilir$)

$$(2x+(-3))^5 = \binom{5}{0}(2x)^5(-3)^0 + \binom{5}{1}(2x)^{5-1}(-3)^1 + \binom{5}{2}(2x)^{5-2}(-3)^2$$

$$(2x+(-3))^5 = \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^4(-3)^1 + \binom{5}{2}(2x)^3(-3)^2$$

olup, $\binom{5}{2}(2x)^3(-3)^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} 8x^3 9 = 720x^3$ den x^3 ün katsayısı 720 bulunur.

Bazı olasılık tanımları

Deney(Deneme): Belirli koşullar altında sonsuz defa tekrarlanabilen, her tekrarında farklı sonuçlar elde edilebilen ve olası sonuçların çok iyi tanımlandığı bir süreçtir. Örneğin bir çift zarın atılması bir deneydir.

Örnek Uzay: Bir deney yapıldığında, gerçekleşebilecek bütün sonuçların kümesine *örnek uzay* denir ve Ω ya da S ile gösterilir.

Olay: S örnek uzayının herhangi bir alt kümesine *olay* denir

Bu durumda S örnek uzayının kendisi de bir olay olup "*kesin olay*" diye adlandırır. Yine, Ø 'de bir olay olup "*imkansız olay*" diye adlandırılır.

Deney	**Sonuçlar**	**Örneklem Uzayı**
"Paranın bir kez atılması"	Y, T	$\mathrm{S} = \{\mathrm{Y}, \mathrm{T}\}$
"Zarın bir kez atılması"	$1, 2, 3, 4, 5, 6$	$\mathrm{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
"Bebeğin cinsiyeti"	E, K	$\mathrm{S} = \{\mathrm{E}, \mathrm{K}\}$
"Paranın iki kez atılması"	$\mathrm{YY}, \mathrm{YT}, \mathrm{TY}, \mathrm{TT}$	$\mathrm{S} = \{\mathrm{YY}, \mathrm{YT}, \mathrm{TY}, \mathrm{TT}\}$

Rastgele olay: Gerçekleşmesi *rastlantıya* bağlı olan olaya rastgele olay denir.

Ayrık Olaylar: A ve B olayları için $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B olayları ayrıktır denir.

Örnek. Hilesiz bir madeni paranın atılması deneyindeki olaylar ayrık mıdır? (Evet)

Örnek. Bir elektrik kontrol panelinde 1, 2 ve 3 ile numaralandırılmış, her biri açık (a) veya kapalı (k) olabilen üç açma-kapama düğmesi bulunmaktadır.

a) Örnek uzayı yazınız.

b) Aşağıdaki biçimde tanımlanan olayları yazınız.

A : $\{$ *En az bir düğme açıktır* $\}$

B : $\{$ 1 *nolu düğme açıktır* $\}$

C : $\{$ *Hiçbir düğme açık değildir* $\}$

D : $\{$ Üç *düğme de açıktır* $\}$

c) A ile B , A ile C , A ile D ayrık olaylar mıdır?

Çözüm.

a) $S = \{ (a,a,a), (a,a,k), (a,k,a), (a,k,k), (k,k,a), (k,a,k), (k,a,a), (k,k,k)\}$

b) $A = \{ (a,a,a), (a,a,k), (a,k,a), (a,k,k), (k,k,a), (k,a,k), (k,a,a)\}$

$B = \{ (a,a,a), (a,a,k), (a,k,a), (a,k,k)\}$

$C = \{ (k,k,k) \}$

$D = \{ (a,a,a) \}$

c) Olayların ayrık olması için, kesişimlerinin boş küme olması gerekir.

$A \cap B = \{ (a,a,a), (a,a,k), (a,k,a), (a,k,k)\} \neq \emptyset$ *olduğundan ayrık değildirler*.

$A \cap C = \emptyset$ *olduğundan* A *ile* C *ayrık olaylardır*.

$A \cap D = \{ (a,a,a)\} \neq \emptyset$ *olduğundan ayrık değildirler*.